

А.И. Вотинов

Центр макроэкономических исследований НИФИ, НИУ ВШЭ, Москва

## Влияние добавления нестандартных нестационарных процессов на характеристики DSGE-моделей<sup>1</sup>

**Аннотация.** Динамические стохастические модели общего равновесия основываются на декомпозиции данных на тренд и цикл. Стандартный подход подразумевает внемоделную декомпозицию данных, при которой трендовая составляющая отбрасывается, а параметры оцениваются на циклической компоненте. Такой подход может привести к потере статистической информации и снижению качества модели, что важно, если она используется в практических целях. В исследовании предлагается добавление в модель нескольких экзогенных процессов, специфичных для секторов, которые дополняют стандартную DSGE-модель. В статье описан процесс добавления трендов внутри модели, а также предложен подход к GMM-оцениванию параметров нестационарных процессов. Показано, что 1) включение в модель таких нестационарных процессов повышает оценку предельной плотности, а также улучшает точность прогнозирования внутри выборки; 2) добавление экзогенных трендов позволяет получить более правдоподобную декомпозицию данных на тренд и цикл; 3) использование GMM-подхода к оцениванию параметров нестационарных процессов позволяет улучшить оценку предельной плотности. Полученные в ходе исследования результаты могут быть использованы для создания ориентированных на практику DSGE-моделей.

**Ключевые слова:** DSGE, оценивание параметров, стохастические процессы, экономические циклы.

Классификация JEL: C65.

Для цитирования: **Вотинов А.И.** (2022). Влияние добавления нестандартных нестационарных процессов на характеристики DSGE-моделей // *Журнал Новой экономической ассоциации*. Т. 3 (55). С. 28–43. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-55-3-2

### Введение

При разработке динамических стохастических моделей общего равновесия (DSGE-моделей) используется предпосылка о том, что статистические данные можно разложить на тренд и цикл. При моделировании предполагается, что какие-то переменные не имеют трендов (например, ключевая ставка). Другие переменные подразумевают динамику по естественным причинам (например, численность населения в трудоспособном возрасте, которая напрямую влияет на уровень выпуска в экономике). Относительно динамики тренда других переменных делаются некоторые теоретические предположения, например, что на них влияет динамика производительности труда.

Важная особенность DSGE-моделей состоит в том, что такие тренды задаются экзогенно. В простом случае на уровне модели долгосрочная динамика ВВП и его компонент одинаковая, так как она определяется только динамикой численности населения и технологического процесса. Тем не менее, долгосрочные тренды в динамике ВВП и его компонент для многих экономик сильно отличаются: импорт может расти значительно быстрее уровня ВВП, а государственное

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-18-00482) (<https://rscf.ru/project/21-18-00482/>).

потребление, наоборот, медленнее. В таком случае число экзогенных трендов не соответствует данным, что приводит к негативным последствиям.

Достаточно популярный подход заключается в отбрасывании трендовой составляющей из данных. При таком подходе к наблюдаемым рядам применяется некоторый статистический фильтр (наиболее часто – HP-фильтр), который разделяет данные на трендовую и циклическую составляющие, после чего первая отбрасывается. Тем не менее, при использовании такого подхода теряется значительная доля статистической информации, особенно касающейся коинтеграции статистических рядов (Иващенко, 2019; Niño-Murriel, Rodríguez-Niño, 2017).

Другой подход предполагает непосредственное моделирование экзогенных трендов в виде нестационарных стохастических или детерминированных процессов со сносом. Так, в литературе моделируется производительность труда (Smets, Wouters, 2003, 2005), специфичная для сектора производительность создания инвестиционного товара (Fischer, 2006; Justiniano, Primiceri, Tambalotti, 2011; Schmitt-Grohé, Uribe, 2011), динамика населения (Chang, Doh, Schorfheide, 2007). Предложенные в этих статьях подходы являются достаточно популярными и зарекомендовали себя в академической литературе.

Несколько более расширенный подход использовался в (Andrle et al., 2009). В работе в модель добавлялись несколько специфичных для сектора производительностей и некоторые другие тренды, лучше описывающие происходящие в экономике средне- и долгосрочные процессы. Позже данный подход был адаптирован в работе (Вотинов, Лазарян, 2020) для российских данных в несколько урезанном виде. Было показано, что включение в модель дополнительных трендов позволяет увеличить качественные и количественные характеристики DSGE-модели.

Важный с точки зрения учета особенностей российской экономики подход был предложен в (Крепцев, Селезнев, 2018). Авторы добавили в модель нестационарный процесс в уровне цены на нефть. Тем не менее, предложенный в этой работе подход для удаления тренда отличается от примененного в настоящей работе, так как он применен на уровне технической реализации алгоритмов.

Данное исследование расширяет предложенный в (Вотинов, Лазарян, 2020) анализ за счет учета трендов, влияющих на внешний сектор (экспорт и импорт играют существенную роль в экономике России, поэтому их учет может улучшить качество модели). Также предложен GMM-подход к оцениванию параметров изменения экзогенных трендов, использование которого приводит к увеличению предельной плотности (по сравнению с классическим байесовским оцениванием). Был проведен ряд качественных и количественных тестов, которые позволяют сделать вывод о том, как на свойства DSGE-моделей влияет число экзогенных трендов в модели и их тип, способ оценивания параметров трендов (GMM или байесовский подходы), наличие ошибок измерения.

Работа построена следующим образом. Сначала приведена декомпозиция на тренд и цикл, а также сформулирован подход к добавлению в модель сектор-специфичных трендов во внешний сектор. Далее проанализировано влияние этих дополнительных трендов на выполнение макроэкономических балансов, после чего следует обсуждение используемых в работе данных. Последующий раздел посвящен GMM-подходу к оцениванию темпов изменения трендов, который является простой и эффективной альтернативой классическому байесовскому. Далее следует обсужде-

ние влияния включения дополнительных трендов и различных подходов к оцениванию параметров модели на свойства DSGE-модели. В конце работы приведен анализ робастности результатов к числу дополнительных экзогенных процессов.

### Модель

В общем виде любая переменная  $X_t$  в DSGE-модели может быть представлена как  $X_t = \bar{X}_t x_t$ , где  $x_t$  — это циклическая компонента;  $\bar{X}_t$  — трендовая компонента, для которой выполнено  $\ln(\bar{X}_t / \bar{X}_{t-1}) = \mu_t^X = f(\mu_{i,t}^{exo})$ , где  $\mu_t^X$  — темп изменения тренда  $\bar{X}_t$ , зависящий от некоторых экзогенных нестационарных процессов с темпами изменения  $\mu_{i,t}^{exo}$  (которые могут быть как детерминированными, так и стохастическими),  $f$  — некоторая линейная функция.

Для возможности существования траектории сбалансированного роста (ТСР) в DSGE-модели необходимо, чтобы все слагаемые в любом уравнении росли с одинаковым темпом в долгосрочном периоде. На практике для получения решения DSGE-модели используются следующие полезные свойства логарифмических темпов: темп изменения тренда произведения двух переменных равен сумме темпов изменения трендов каждой из переменных отдельно, а темп изменения тренда в степени  $\alpha$  равен произведению  $\alpha$  с темпом изменения тренда. Эти свойства позволяют получить ограничения на темпы изменения трендов переменных, которые условно можно представить в виде (для некоторых  $X_t, Z_t, Y_t$  и  $W_t$  с соответствующими темпами изменения  $\mu$ ):

$$X_t = Z_t + Y_t W_t + U_t^\alpha \Rightarrow \mu^X = \mu^Z = \mu^Y + \mu^W = \alpha \mu^U.$$

Таким образом, только в случае выполнения равенств в правой части данного выражения будет существовать ТСР в левой. Данные свойства потребуются далее для приведения DSGE-модели к стационарному виду.

В исследовании используется модель, аналогичная (Вотинов, Лазарян, 2020), за исключением ряда изменений.

Во-первых, выдвигается предположение о том, что домашние хозяйства делают трансферты ( $Trf_t$ ) за рубеж. Данное предположение необходимо, так как на протяжении всего рассматриваемого периода экспорт из России значительно превышал импорт. Согласно классической записи платежного баланса отсутствие трансфертов предполагало бы, что вся эта разница между экспортом и импортом идет на погашение внешнего долга. Тем не менее, получаемая в рамках такой модели оценка внешнего долга была бы слишком большой по сравнению с наблюдаемыми данными. По этой причине делается предпосылка о наличии трансферта за рубеж, уровень которого калибруется таким образом, чтобы обеспечить сопоставимость модельного внешнего долга статистическим данным.

Во-вторых, в модель добавляются сектор-специфичные производительности при создании экспортного и импортного товаров. Далее будет приведена процедура учета данных процессов и вывод условий на темпы изменения трендов эндогенных переменных.

В рамках описанного в (Вотинов, Лазарян, 2020) подхода предполагается, что товары конечного потребления (потребление домашних хозяйств и государства, а также инвестиционный товар) производятся из внутреннего и импортного товаров с применением функции Кобба–Дугласа с добавлением специфичной для сектора производительности. В общем виде производственная функция имеет вид

$X_t = a_t^X (X_t^D)^{\alpha_X} (X_t^M)^{1-\alpha_X}$ , где  $X_t$  – некоторый товар конечного потребления;  $X_t^D, X_t^M$  – количество внутреннего ( $D$ ) и импортного ( $M$ ) товара, необходимого при создании конечного товара  $X$ ;  $\alpha_X$  – доля внутреннего товара при создании конечного;  $a_t^X$  – детерминированный (можно записать как стохастический) тренд производительности, специфичный для сектора  $X$ . В терминах долгосрочных темпов изменения переменных данное уравнение может быть переписано в виде:

$$\mu^X = \mu_a^X + \alpha_X \mu^D + (1 - \alpha_X) \mu^M, \quad (1)$$

где  $\mu^X$  – темп изменения тренда в конечном товаре  $X$ ;  $\mu^D, \mu^M$  – темп изменения тренда во внутреннем и импортном товарах;  $\mu_a^X$  – темп изменения тренда производительности  $a_t^X$ . Аналогично, пользуясь выражением для индекса цен для функции Кобба–Дугласа, можно вывести следующее выражение для долгосрочных темпов изменения дефляторов  $\pi$ :  $\pi^X = -\mu_a^X + \alpha_X \pi^D + (1 - \alpha_X) \pi^M$ .

Для того чтобы ввести дополнительные тренды для внешнего сектора, рассмотрим уравнение спроса на экспортный товар  $Ex_t$ , которое имеет вид  $Ex_t = (P_t^{Ex} / P_t^* e_t)^{-\eta^F} \xi_t^{Ex} Y_t^*$ , где  $P_t^{Ex}$  – дефлятор экспортных цен с темпом изменения  $\pi^{Ex}$ ,  $P_t^*$  – дефлятор зарубежных цен с темпом изменения  $\pi^*$ ,  $e_t$  – номинальный валютный курс с темпом изменения  $\mu^e$ ,  $Y_t^*$  – зарубежный выпуск с темпом изменения  $\mu^*$ , а  $\xi_t^{Ex}$  – шок спроса на экспортную продукцию.

Перепишем данное выражение в терминах долгосрочных темпов изменения трендов:

$$\mu^{Ex} = -\eta^F (\pi^{Ex} - \pi^* - \mu^e) + \mu^*. \quad (2)$$

Для того чтобы найти тренд изменения номинального валютного курса, необходимо предположить, что доли моделируемой экономики в мировой – постоянные, а это подразумевает выполнение равенства:

$$\mu^Y + \pi^Y = \mu^* + \pi^* + \mu^e. \quad (3)$$

Тогда, решая систему уравнений (2)–(3), получаем:

$$\begin{cases} \mu^* = \mu^Y + \mu^{Ex} + (1 - \alpha_{Ex}) \mu_a^M = \mu^{Ex}; \\ \mu^e = \pi^Y - \pi^* - \mu_a^{Ex} - (1 - \alpha_{Ex}) \mu_a^M = \pi^{Ex} - \pi^*. \end{cases}$$

Повышенная по сравнению с ВВП эффективность при создании экспортного товара ( $\mu_a^{Ex} > 0$ ) подразумевает больший спрос со стороны внешнего сектора, и, соответственно, повышенный темп изменения реальных объемов экспорта. Повышенный спрос на экспортный товар обуславливает меньший темп девальвации национальной валюты (чем выше  $\mu_a^{Ex}$ , тем ниже  $\mu^e$ ).

Далее для описания импортера предположим, что импортер  $k$  покупает за границей  $Y_t^F(k)$  единиц импортируемого товара и производит из них продаваемые конечным производителям импортные товары  $Y_t^M(k)$  по технологии:

$$Y_t^M(k) = a_t^M Y_t^F(k), \quad (4)$$

где  $a_t^M$  – это специфичная для сектора производительность создания импортного товара. Разница в количестве импортируемого и импортного товара может быть обусловлена разницей в технологиях: зарубежные товары могут быть в несколько раз более эффективными, из-за чего одна единица импортного товара на производстве может заменить несколько единиц внутреннего. Тогда функция прибыли импортера  $k$  будет выглядеть так:

$$\Pi_t^M(k) = Y_t^M(k) \left( P_t^M(k) - \frac{P_t^F}{a_t^M} \right) - \frac{\Psi^M \left( \frac{P_t^M(k)}{P_{t-1}^M(k)} - e^{\pi_{SS}^M} \right)^2}{2} Y_t^M P_t^M.$$

При формулировании задачи импортера был применен подход Ротемберга, отличающийся простотой по сравнению с ценообразованием по Кальво (Иващенко, 2019). При решении задачи оптимизации дисконтированного потока прибыли можно показать, что на ТСР темпы изменения цен будут связаны уравнением  $\pi^M = \pi^F - \mu_a^M$ .

Используя формулу (4), а также предпосылку о том, что на ТСР выполнено  $\pi^F = \mu^e + \pi^* = \pi^{Ex}$ , можно получить ключевую для решения модели систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu^Y = \alpha \mu^I + (1 - \alpha) \mu^A; \\ \mu^M = \mu^{Ex} + \mu_a^M; \\ \mu^X = \mu_a^X + \alpha_X \mu^Y + (1 - \alpha_X) \mu^M, \end{cases}$$

где первое уравнение выводится из функции Кобба–Дугласа с учетом уравнения накопления капитала; второе – следует из формулы (4); третье – уравнение (1) с учетом  $\mu^D = \mu^Y$ . Решением данной системы относительно эндогенных переменных будет:

$$\begin{cases} \mu^Y = (\alpha / (1 - \alpha)) [\mu_a^I + (1 - \alpha_I) (\mu_a^M + \mu_a^{Ex}) / \alpha_{Ex}] + \mu^A; \\ \mu^X = \mu_a^X + \alpha_X \mu^Y + (1 - \alpha_X) \mu^M; \\ \mu^M = \mu^Y + (\mu_a^M + \mu_a^{Ex}) / \alpha_{Ex}. \end{cases} \quad (5)$$

Добавление специфичной для сектора производительности  $\alpha_t^M$  в процесс создания импортного товара оказывает влияние на тренд в ВВП в том случае, если импортный товар участвует в создании инвестиционного товара ( $0 \leq \alpha_t < 1$ ). Чем больше импортного товара используется при создании инвестиционного, тем больше трендовая динамика импорта влияет на динамику внутреннего товара. Если же  $\alpha_t = 1$ , то указанное выше решение для  $\mu^Y$  будет аналогично показанному в (Вотинов, Лазарян, 2020).

### Выполнение балансов

Ключевой характеристикой модели общего равновесия является выполнение балансовых условий. В данном разделе будет показано, что представленный выше подход к добавлению трендов делает структуру балансов стационарной. Основные два баланса связывают произведенные или импортные товары с их потреблением:

$$Y_t^D (1 - \Psi_p(\cdot)) = C_t^D + I_t^D + G_t^D + Ex_t^D, \quad (6)$$

$$Y_t^M (1 - \Psi_M(\cdot)) = C_t^M + I_t^M + G_t^M + Ex_t^M, \quad (7)$$

где  $\Psi_p$  и  $\Psi_M$  – слагаемые, отвечающие за жесткости по Ротембергу. Данные балансы обеспечивают, чтобы все произведенные или импортные товары были потреблены. В каждом выражении тренды переменных слева и справа растут в одном темпе. Отметим, что при решении задачи конечного производителя обязательно выполнение балансового равенства, в котором каждое слагаемое растет в среднем с одинаковым темпом  $X_t P_t^X = X_t^D P_t^D + X_t^M P_t^M$ . Таким образом, если уравнение (6) умножить на  $P_t^D$  и сложить с уравнением (7), умноженным на  $P_t^M$ , то получим выражение

$$Y_t^D (1 - \Psi_p(\cdot)) P_t^D = C_t P_t^C + I_t P_t^I + G_t P_t^G + Ex_t P_t^{Ex} - Y_t^M (1 - \Psi_M(\cdot)) P_t^M,$$

что является номинальным балансом ВВП по использованию. Таким образом, систематического изменения структуры балансов не происходит, так как

выполняются условия на темпы изменения трендов – каждое слагаемое в равенстве растет с одинаковым темпом. При этом платежный баланс принимает вид  $B_t^* e_t - B_{t-1}^* R_{t-1}^* e_t = Ex_t P_t^{Ex} - Y_t^F P_t^F - Tr_t^f$ , где  $B_t^*$  – уровень внешнего долга в иностранной валюте. В данном случае должны выполняться следующие равенства:  $\mu^{B^*} + \mu^e = \mu^{Ex} + \pi^{Ex} = \mu^F + \pi^F$ . Так как  $\pi^F = \pi^{Ex}$ ,  $\mu^F = \mu^{Ex} = \mu^*$ ,  $\mu^{B^*} = \mu^* + \pi^*$ , несложно убедиться, что структура платежного баланса также не меняется на ТСР.

### Данные

В работе были использованы данные по динамике реального ВВП и его компонент, а также дефляторов этих показателей. Таким образом, мы учитываем ряды с I квартала 2000 г. по IV квартал 2019 г. (Данные за 2020 г. в анализ не включались, чтобы исключить влияние эффекта пандемии.) В табл. 1 приведены статистики логарифмических изменений (квартал к предыдущему кварталу) реального ВВП и его компонент, а также дефляторов данных величин. Статистики приведены с разбивкой на два периода: 1) вся используемая выборка данных, 2) выборка с I квартала 2010 г.

Темпы изменения гетерогенны во времени и по показателям. Например, темпы изменения ВВП за период с 2010 до начала 2020 г. чуть ли не в 2 раза меньше, чем за весь рассматриваемый период. Аналогичная картина наблюдается и для других переменных: темпы изменения импорта меньше в 2 раза, инвестиций в 1,5 раза и т.п. Для описания такой изменчивости во времени обычно достаточно одного нестационарного процесса (например, технологического прогресса), который будет отражать общий понижающийся тренд, наблюдаемый в данных.

Существенная гетерогенность наблюдается в темпах изменения ВВП и его компонент. Так, темпы изменения государственного потребления в 3–8 раз ниже всех остальных компонент. При этом на всем горизонте темпы роста реального импорта примерно в 2 раза выше темпов изменения ВВП. Для того чтобы модель могла описывать эти различия между показателями, необходимо включить в модель специфичных для сектора трендов.

**Таблица 1**

Средние значения логарифмических изменений реальных переменных и их дефляторов, с I квартала 2000 г. по IV квартал 2019 г.

Показатель	Период	ВВП, %	Потребление, %	Инвестиции, %	Потребление государства, %	Экспорт, %	Импорт, %
Изменение реальных величин	2000 – IV кв. 2019	0,85	1,29	1,25	0,26	1,02	2,08
	2010 – IV кв. 2019	0,48	0,59	0,85	0,04	0,63	0,90
Изменение дефлятора	2000 – IV кв. 2019	2,76	2,28	3,29	3,72	1,97	1,42
	2010 – IV кв. 2019	1,86	1,54	2,55	2,04	1,72	1,69

*Источник:* составлено автором на основе данных по ВВП и его компонент с использованием методологии из (Пильник, Радионов, Станкевич, 2018).

Таблица 2

Доля компонент ВВП (строка 1), а также оценка доли импортного товара, используемого при создании конечного (строки 2 и 3), %

Показатель	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>G</i>	<i>Ex</i>	<i>Im</i>
Доля в ВВП	52,43	22,97	18,10	27,36	20,86
Доля импортных товаров (данные)	25,20	33,07	0,30	0,02	–
Доля импортных товаров (модельная)	25,27	33,13	0,00	0,00	–

Источник: Росстат «Таблицы ресурсов и использования товаров и услуг».

Важной характеристикой модели является структура конечных товаров. Для того чтобы определить долю импортных и внутренних товаров, используемых при создании конечного, применялись «Таблицы ресурсов и использования товаров и услуг Российской Федерации» (далее – таблицы использования) за 2012–2018 гг. С помощью данных таблиц были получены доли компонент ВВП и доли импортных товаров в конечных.

Расчет доли импортного товара в конечном происходит в два этапа. Из таблицы использования можно определить, сколько импортных товаров потребовалось для создания промежуточных, а сколько – непосредственно направлено на конечное потребление. Это можно формализовать в виде:

$$Y_t^M = Y_t^{M,inter} + Y_t^{M,final} = Y_t^{M,inter} + Y_t^{M,final,C} + Y_t^{M,final,I} + Y_t^{M,final,G} + Y_t^{M,final,Ex},$$

где  $Y_t^M$  – это общий объем импортных товаров,  $Y_t^{M,inter}$  – объем импортных товаров при создании промежуточных товаров,  $Y_t^{M,final,X}$  – объем импортных товаров при создании конечного товара  $X$ . Так как в рамках разрабатываемой DSGE-модели импортный товар не используется в качестве фактора производства промежуточного товара, то для расчета долей допускается  $Y_t^{M,inter,X} = Y_t^{M,inter} Y_t^{M,final,X} / Y_t^{M,final}$ , где  $Y_t^{M,inter,X}$  – объем импортных товаров при создании промежуточных товаров, используемых затем в производстве конечного товара  $X$ . Далее, зная объем производства конечного товара  $X$ , а также оценку его количества при производстве импортного товара, рассчитываются соответствующие доли импортных товаров  $(1 - \alpha_X)$  (табл. 2, строка 2). Тем не менее для товара «государственное потребление» и экспортного товара данная доля близка к нулю. Далее в модели эти доли обнуляются, а остальные корректируются пропорционально таким образом, чтобы доля импортного товара в ВВП осталась неизменной.

### Определение параметров для трендов

Для оценки параметров темпов изменения трендов можно применить байесовский подход, но с его помощью невозможно получить формулу оценивания в аналитическом виде. В данном разделе предлагается подход к получению оценки обобщенным методом моментов (далее – GMM), который может быть альтернативой байесовскому. Впервые этот метод был предложен в работах (Hansen, 1982; Hansen, Singleton, 1982), подробное изложение подхода можно найти в (Hall, 2005).

Основная идея, лежащая в GMM, заключается в сравнении теоретических моментов с их эмпирическими аналогами. Оценка GMM – такой вектор параме-

тров, при котором расстояние между теоретическими и эмпирическими моментами минимальное. В общем случае оценка GMM выглядит следующим образом:

$$\theta_{GMM} = \arg \min(\theta) [m(\theta) - \hat{m}(X)]^T W [m(\theta) - \hat{m}(X)],$$

где  $\theta_{GMM}$  – оценка GMM;  $m(\theta)$  – теоретический момент, зависящий от вектора параметров  $\theta$ ;  $\hat{m}(X)$  – соответствующий эмпирический момент, зависящий только от данных;  $W$  – некоторая матрица, которая влияет на эффективность получаемых оценок. В данной работе для простоты эта матрица полагается единичной, но на практике она может определяться, например, с помощью двухшаговой процедуры Хансена. В общем случае число используемых для оценивания моментов может быть больше числа оцениваемых параметров.

Рассмотрим пример, когда в модель включен только один экзогенный тренд – технологический процесс. В таком случае, согласно формуле (5), имеем  $\mu^X = \mu^A$ , т.е. математическое ожидание темпов изменения ВВП и его компонент равно одному параметру  $\mu^A$ . Эмпирический аналог данного параметра – величина  $\overline{dX}$ , которая соответствует среднему темпу изменения величины  $X$  (ВВП или некоторая компонента). Тогда в предположении о единичной весовой матрице  $W$  оценка параметра  $\mu^A$  будет равна:

$$\widehat{\mu}_{GMM}^A = \arg \min(\mu^A) \sum (\mu^A - \overline{dX})^2 = (\overline{dY} + \overline{dC} + \overline{dI} + \overline{dG} + \overline{dEx} + \overline{dIm}) / 6. \quad (8)$$

Применим этот подход к системе уравнений (5) в общем виде, содержащей параметры для более чем одного тренда. Средние значения реальных темпов изменения ВВП и его компонент позволяют получить оценку параметров модели:

$$\begin{cases} \widehat{\mu}_a^M = \overline{dM} - \overline{dEx}; \\ \widehat{\mu}_a^X = \overline{dX} - \alpha_x \overline{dY} - (1 - \alpha_x) \overline{dM}; \\ \widehat{\mu}^A = \overline{dY} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left[ \widehat{\mu}_\theta^1 + (1 - \alpha_l) (\widehat{\mu}_a^{Ex} + \widehat{\mu}_a^M) / \alpha_{Ex} \right]. \end{cases} \quad (9)$$

Обратим внимание, что данная оценка параметров модели может быть улучшена. Во-первых, GMM-подход позволяет ввести большее число теоретических моментов (например, статистика по темпам изменения дефляторов ВВП и его компонент может улучшить надежность оценок). Во-вторых, использование не единичной матрицы  $W$ , а, например, полученной с помощью двухшаговой процедуры Хансена, позволит повысить эффективность оценок. Тем не менее, система вида (9) дает возможность выразить параметры темпов изменения экзогенных процессов в простом аналитическом виде.

### Качество декомпозиции данных на тренд и цикл

Для того чтобы оценить необходимость включения дополнительных экзогенных процессов, был оценен ряд DSGE-моделей. Основные отличия между моделями заключаются в числе трендов (один технологический процесс или несколько), включении ошибок измерения и способе оценивания темпов изменения экзогенных процессов (байесовский подход или метод моментов).

Всего было оценено шесть версий модели: короткая (short), включающая только один экзогенный процесс; полная (full), включающая шесть экзогенных процессов (производительность труда и сектор-специфичные производительности; темпы изменения процессов оцениваются с использованием байесовского

подхода), а также полная GMM (full GMM), для которой темпы изменения шести экзогенных процессов оценены с помощью описанного в прошлом разделе GMM-подхода; эти же модели оценивались с/без добавления ошибок измерения.

При оценивании параметров модели применяется подход системных прайоров (system priors, (Andrle, Benes, 2013)). При работе с DSGE-моделями достаточно трудно добиться содержательной декомпозиции на тренд и цикл только за счет классических априорных распределений на параметры, так как по определению тренд и цикл – ненаблюдаемые величины. В работе (Andrle, Benes, 2013) применялись так называемые системные прайоры, которые позволяют наделять оцениваемую DSGE-модель желаемыми свойствами. Согласно этому подходу при оценке модели в рамках текущего исследования используется жесткий системный прайор на декомпозицию на тренд и цикл для ряда ВВП – для идентификации цикла используется оценка цикла с помощью классического фильтра Ходрика–Прескотта. Такой подход позволяет получить логичные оценки динамики технологического процесса, что, в том числе, дает возможность в значительной степени увеличить правдоподобие модели.

При оценке модели часть параметров калибровалась исходя из принятых в литературе значений, а часть оценивалась при помощи байесовского подхода. Показатель  $\alpha$  принимался равным 0,5,  $\beta = 0,99$ , привычки к потреблению  $\theta = 0,7$ , обратная эластичность предложения труда  $\phi L = 1,25$ , уровень амортизации  $\delta = 0,025$ , параметр жесткости цен для внутреннего производителя и импортера ( $\psi^P$  и  $\psi^M$ ) = 30, надбавка монополиста полагалась равной 11,1%, параметр жесткости инвестиций равен 6.

Часть параметров определялась в соответствии с отношением государственного потребления, экспорта, импорта, внутреннего и внешнего долга к ВВП. Структурные шоки модели записывались как AR(1)-процессы, для которых авторегрессионные коэффициенты имеют априорное нормальное распределение с математическим ожиданием 0,5 и стандартным отклонением 0,2, а стандартные отклонения процессов – априорное обратное гамма-распределение с математическим ожиданием 0,05 и стандартным отклонением 0,1. При включении в модель ошибок измерения для их стандартных отклонений использовалось априорное обратное гамма-распределение с математическим ожиданием 0,001 и стандартным отклонением 0,01. В случае байесовского оценивания параметров изменения экзогенных процессов их априорное распределение полагалось нормальным с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением 0,01.

Процедура оценивания реализована в программной среде Dynare. В программный код был добавлен алгоритм оценивания параметров темпов изменения экзогенных процессов для случая GMM: внутри кода рассчитываются необходимые средние значения, после чего применяется формула (9). Байесовское оценивание остальных параметров реализовано с использованием стандартных процедур.

В табл. 3 приведены результаты оценки шести приведенных моделей. Последний столбец таблицы – оценка логарифма предельной плотности (marginal data density), рассчитанной с аппроксимацией Лапласа. В байесовской постановке нельзя провести формальный статистический тест наподобие теста правдоподобия, поэтому для сравнения моделей будут использоваться значения, описанные в работе (Kass, Raftery, 1995): если разница логарифмов предельных плотностей от 0 до 1, то

Таблица 3

Результаты оценки параметров модели с использованием формулы (9), а также байесовского подхода

Тип модели	Ошибки измерений	$\mu^A$	$\mu_a^C$	$\mu_a^I$	$\mu_a^G$	$\mu_a^{Ex}$	$\mu_a^{Im}$	Laplace
Short	–	0,0078	–	–	–	–	–	1130,6
	+	0,0078	–	–	–	–	–	1202,5
Full	–	0,0055	–0,0000	–0,0010	–0,0055	0,0038	0,0047	1171,8
	+	0,0080	–0,0000	–0,0055	–0,0054	0,0013	0,0115	1189,4
Full GMM	–	0,0044	0,0013	–0,0001	–0,0058	0,0018	0,0106	1177,5
	+	0,0044	0,0013	–0,0001	–0,0058	0,0018	0,0106	1219,7

**Примечание.** Full – модель со всеми экзогенными процессами и байесовским оцениванием, Full GMM – модель со всеми экзогенными процессами и GMM-оцениванием, Short – модель с одним экзогенным процессом и байесовским оцениванием, Laplace – оценка предельной плотности с использованием аппроксимации Лапласа.

Источник: составлено автором.

разница незначительна («Not worth than a bare mention»), если от 1 до 3 – можно делать выводы о наличии разницы («Positive»), от 3 до 5 – сильная («Strong»), выше 5 – очень сильная («Very strong»). Проводя аналогию с тестом правдоподобия, разница логарифмов предельной плотности в 3 единицы означает, что одна модель в 20 раз вероятнее другой, а значит, вероятность ошибки первого рода при выборе этой модели в качестве основной примерно соответствует 5%. При этом в анализе важно учитывать, что сами значения величины предельной плотности получены с помощью аппроксимации Лапласа, которая сама по себе может быть неточной.

На основании полученных результатов можно сделать несколько выводов.

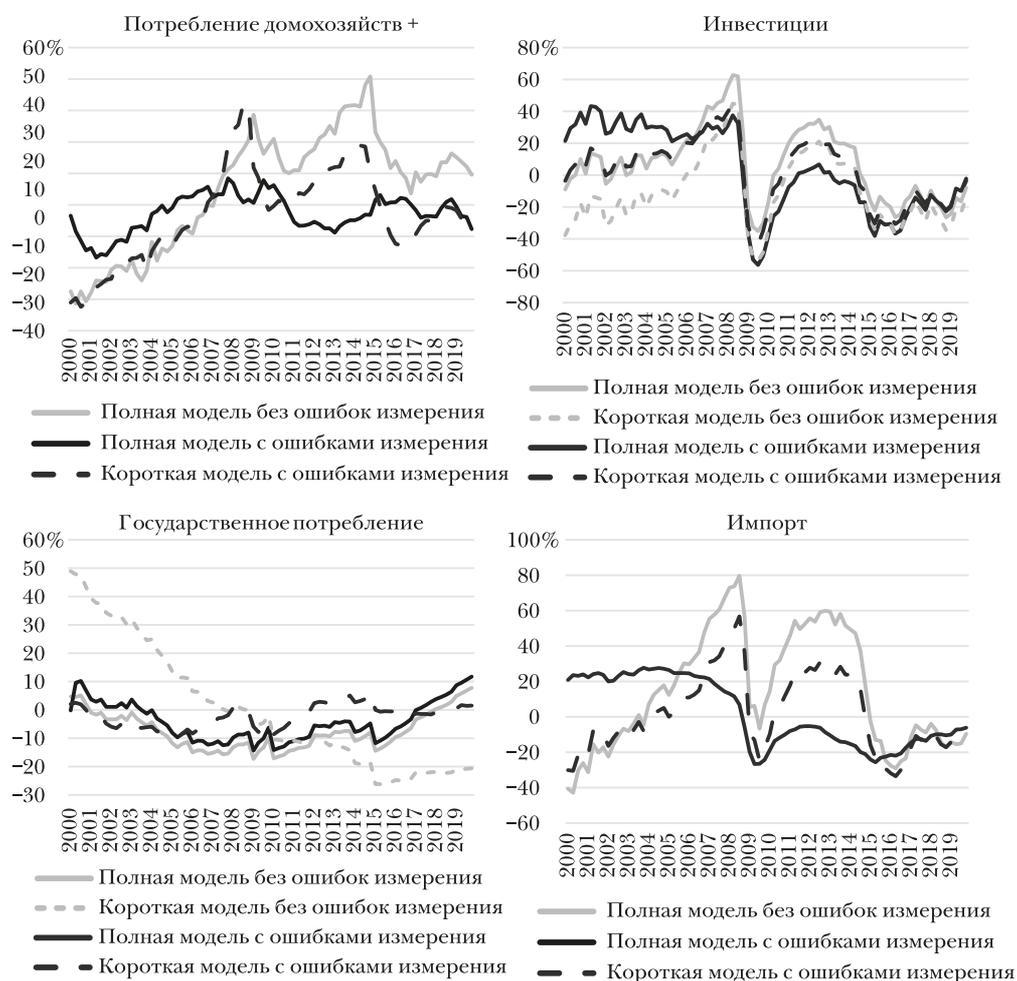
Во-первых, добавление в модель ошибок измерения повышает плотность. Без ошибок измерения в модели используются структурные шоки для объяснения трендовой динамики ВВП и его компонент: например, чтобы модель смогла объяснить наличие существенных расхождений в средних темпах изменения ВВП и государственного потребления (0,85% и 0,26% соответственно), необходимы в среднем большие величины шоков государственного потребления. Из-за этого структурные шоки начинают описывать именно трендовую составляющую, но не реальные процессы, происходящие в экономике, что ухудшает описательную способность модели. Включение в модель ошибок измерения позволяет несколько снизить последствия данной проблемы, что особенно видно для модели с одним экзогенным трендом: добавление ошибок измерения увеличивает плотность на 71,9 (для модели с большим числом трендов соответствующее изменение равно 17,6).

Во-вторых, включение в модель дополнительных экзогенных трендов улучшает плотность в случае отсутствия ошибок измерения. В первую очередь это связано с той же причиной, которая была описана выше: в случае отсутствия экзогенных процессов, описывающих среднесрочные тренды в данных, модель использует структурные шоки для описания наличия этих трендов, а не для описания происходящих в экономике процессов. Добавление экзогенных процессов увеличивает плотность на 41,2 в случае отсутствия ошибок измерения. При нали-

чи ошибок измерения эффект на плотность зависит от процедуры оценивания и априорных распределений параметров.

Наконец, GMM-оценивание параметров изменения экзогенных процессов с помощью формулы (9) приводит к улучшению значения плотности по сравнению с байесовским оцениванием. Так, для моделей без ошибок измерения GMM-оценка дает увеличение логарифма плотности на 5,7, с ошибками измерения – на 30,3, что говорит в пользу использования такого типа оценок.

Важным преимуществом добавления дополнительных экзогенных процессов в модель является улучшение интерпретируемости декомпозиции на тренд и цикл. На рисунке отражена циклическая компонента для частного потребления, уровня инвестиций, государственного потребления и импорта. Приведено четыре оценки циклической компоненты. Для моделей с использованием GMM



**Рисунок**

*Переменные модели и оценка их трендовых компонент с использованием различных моделей*

и ВВП результаты не приведены, так как для GMM они в целом совпадают с результатами для полной модели, оцененной с помощью байесовского подхода, а для ВВП – совпадают (см. описание выше системных прайоров) для всех моделей, а для экспорта декомпозиция не является показательной.

При интерпретации полученных результатов необходимо сформулировать некоторые критерии, которым должна отвечать циклическая компонента ряда. Во-первых, цикл не должен систематически расти (или сокращаться), т.е. в нем должен отсутствовать тренд. Во-вторых, цикл периодически должен меняться, за перегревом всегда следует спад. Данные критерии можно формализовать, но для простоты приведем качественный анализ полученных графиков.

Для коротких моделей без ошибок измерения зачастую получаются неадекватные оценки циклической компоненты. Например, на графиках не приведены оценки циклической компоненты потребления для домашних хозяйств и импорта, так как они сильно отклоняются от нуля – наблюдается систематический сдвиг. При этом добавление ошибок измерения в полную модель также несколько искажает оценку циклической компоненты, например, для импорта. В целом, добавление ошибок измерения усложняет процедуру оценивания параметров модели, из-за чего для получения качественных оценок циклической компоненты необходимо правильно подбирать априорные распределения – ошибки измерения зачастую сильно искажают структурную динамику переменных.

Важным является случай государственного потребления, для которого характерно существенное отличие темпов изменения по сравнению с ВВП и других компонент. Так, например, если в модель не будет введен дополнительный специфичный тренд для государственного потребления, а также будут отсутствовать ошибки измерения, то оценка циклической компоненты будет полностью неинтерпретируемой – из-за разницы в средних темпах изменения ВВП и государственного потребления данная компонента представлена нисходящим трендом. При этом оценки как полной, так и короткой модели, практически идентичны. Таким образом, добавление в модель дополнительных трендов улучшает качество декомпозиции на тренд и цикл.

Другой важной характеристикой DSGE-моделей является ее прогнозная сила. Для сравнения моделей с разным количеством экзогенных процессов были рассчитаны следующие относительные характеристики:

$$\text{relative } RMSE(m_1, m_2 | t) = \frac{\text{median}(RMSE(dY | t)_{m_1}, RMSE(dC | t)_{m_1}, \dots)}{\text{median}(RMSE(dY | t)_{m_2}, RMSE(dC | t)_{m_2}, \dots)},$$

где  $RMSE(dX | t)_{m_1}$  – оценка RMSE прогноза показателя  $dX$ , сделанного с помощью модели  $m_1$ , на  $t$  кварталов вперед. В табл. 4 приведены оценки данного показателя при попарном сравнении различных моделей для ВВП и его компонент на разных горизонтах прогнозирования.

Важно отметить, что чем ниже значение, тем лучше модель прогнозирует, RMSE которой приведено в числителе. Так, например, добавление в модель ошибок измерения увеличивает прогнозную силу моделей: в первой и второй строке приведено отношение медианного RMSE для короткой и полной модели, где в числителе использована модель с ошибками измерения, а в знаменателе без них. При краткосрочном прогнозировании (на 1 квартал) модель с ошибками измерения прогнозирует примерно на 30% лучше, чем модель без ошибок. При

Таблица 4

Сравнение прогнозной силы моделей (in-sample), отношение медиан RMSE для ВВП и его компонент для разных моделей

Числитель	Знаменатель	Прогноз на $t$ кварталов вперед				
		$t = 1$	$t = 2$	$t = 4$	$t = 8$	$t = 12$
Short, obs	short, nobis	0,687	0,640	0,762	1,005	1,008
Full, obs	full nobis	0,715	0,780	0,926	0,949	0,981
Full, obs	short, obs	0,965	0,947	0,905	0,944	0,981
Full, nobis	short, nobis	0,928	0,777	0,745	0,999	1,008
Full GMM, obs	full, obs	1,009	1,049	1,083	1,041	1,008
Full GMM, nobis	full, nobis	0,995	1,026	0,999	0,985	0,992

**Примечание.** Full – модель со всеми экзогенными процессами; Full GMM – модель со всеми экзогенными процессами и GMM-оцениванием; Short – модель с одним экзогенным процессом; obs – модель с ошибками измерения, nobis – модель без ошибок измерений.

*Источник:* составлено автором.

этом разница постепенно сокращается: например, при прогнозировании на год медиана RMSE для моделей с ошибками измерения на 7–24% лучше, а при прогнозировании на 3 года разница практически исчезает.

Добавление в модель дополнительных экзогенных процессов повышает прогнозную силу модели внутри выборки (in-sample), особенно при среднесрочном прогнозировании. Так, для прогнозирования на 1 квартал вперед RMSE-модели с несколькими нестационарными экзогенными процессами лучше на 4% при добавлении ошибок измерения, на 7% – без них. При увеличении горизонта до среднесрочного периода (полгода/ год) прогнозная сила моделей с несколькими экзогенными процессами увеличивается на 5–25% в зависимости от наличия ошибок измерения.

Если сравнивать прогнозную силу моделей, оценки темпов изменения экзогенных процессов в которых были получены с помощью GMM и байесовского подходов, то в случае добавления ошибок измерения прогнозная сила для моделей с GMM-оцениванием несколько хуже, а при исключении ошибок измерения из модели – лучше.

Исходя из проведенного анализа, можно сделать следующие выводы. Во-первых, добавление дополнительных нестационарных экзогенных процессов приводит к увеличению предельной плотности (marginal data density) и прогнозной силы модели на кратко- и среднесрочном горизонте. Это связано с тем, что при добавлении дополнительных нестационарных процессов структурные ошибки модели начинают описывать реальную динамику макроэкономических переменных, а не разницу между трендами. Во-вторых, использование GMM-оценивания параметров темпов изменения нестационарных процессов облегчает процедуру оценивания параметров модели, как минимум, за счет сокращения числа параметров; при этом результаты качества работы модели зачастую лучше по сравнению со стандартной байесовской процедурой.

Таблица 5

Изменение функции правдоподобия при добавлении (исключении) некоторых параметров в модель (из модели)

$+\sigma^G$	$-\mu_a^C$	$-\mu_a^I$	$-\mu_a^G$	$-\mu_a^{Ex}$	$-\mu_a^{Im}$
-0,74	0,00	-6,04	-2,41	0,60	-0,30

Источник: составлено автором.

### Чувствительность модели к параметризации

Интересным представляется чувствительность модели к параметризации, а именно – к необходимости добавления тех или иных экзогенных процессов. В табл. 5 представлено сравнение оценок постериорной плотности для полных моделей с моделями, для которых, во-первых, экзогенный процесс по государственному потреблению был сделан стохастическим (столбец « $+\sigma^G$ »); во-вторых, были исключены некоторые детерминированные процессы (например, для столбца « $-\mu_a^C$ » был исключен экзогенный процесс для частного потребления). В качестве основной модели, относительно которой происходит сравнение правдоподобия, выступает Full, nobs.

Данные, представленные в табл. 5, показывают, что некоторые параметры имеют значительное влияние на оценку правдоподобия модели. Так, самое значимое влияние оказывает исключение параметров, связанных с трендовой динамикой инвестиций и государственного потребления. Первый параметр значимо влияет на связь выпуск–инвестиции–капитал, что, по сути, обеспечивает трансмиссию связанных с внешним сектором трендов в ВВП. Значимость параметра изменения государственного потребления обусловлена значительной разницей в средних темпах изменениях реального ВВП и государственного потребления. Другие параметры, в том числе связанные с наличием стохастического тренда в государственном потреблении, не настолько значимо влияют на плотность.

Для того чтобы оценить значимость добавления экзогенных процессов во внешний сектор, была оценена модель без параметров  $\mu_a^{Ex}$  и  $\mu_a^{Im}$  (в данном случае модель практически аналогична модели в (Вотинов, Лазарян, 2020)), а также с их добавлением. Так, добавление дополнительного нестационарного процесса в экспорт (параметр  $\mu_a^{Ex}$ ) увеличивает оценку логарифма правдоподобия на 30,1, а в импорт (параметр  $\mu_a^{Im}$ ) – на 27,2. Одновременное добавление параметров приводит к увеличению логарифма правдоподобия на 29,9.

### Заключение

В проведенном исследовании был предложен подход, расширяющий используемый в (Вотинов, Лазарян, 2020) за счет учета трендов в импорте и экспорте. Так, вводятся сектор-специфичные производительности, а именно производительности при создании импортного товара из импортированного и создании экспортного товара конечным производителем. Было показано, как данная модель может быть решена, а также выведены условия на долгосрочную динамику переменных на ТСП.

В ходе исследования был оценен ряд DSGE-моделей, отличающихся друг от друга дополнительными экзогенными процессами, а также подходами к оцениванию параметров. Было показано, что добавление дополнительных экзогенных процессов

при прочих равных улучшает оценку предельной плотности и прогнозные характеристики модели, позволяет получить более осмысленную декомпозицию на тренд и цикл. Полученные выводы сохраняются при добавлении в модель ошибок измерения. Введенные в аналитическом виде GMM-оценки темпов изменения экзогенных процессов позволяют несколько улучшить качество модели при упрощении процедуры оценивания, что может быть полезно при работе со средними и крупными DSGE-моделями. Наконец, был проведен ряд тестов на чувствительность результатов к параметризации модели, которые показали значимость добавления нестационарных процессов, связанных с инвестициями и государственным потреблением.

Результаты исследования могут быть использованы при создании DSGE-моделей, ориентированных на практическое использование. Представляется интересным с академической точки зрения дальнейшее изучение влияния включения дополнительных экзогенных нестационарных процессов на свойства DSGE-моделей.

#### ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

- Вотинов А.И., Лазарян С.С.** (2020). Влияние трендов в данных на качество оценок DSGE-моделей // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. Т. 24. № 3. С. 372–390. [Votinov A.I., Lazaryan S.S. (2020). The influence of trends in the data on the accuracy of DSGE-model estimates. *HSE Economic Journal*, 24, 3, 372–390 (in Russian).]
- Иващенко С.М.** (2019). Модели ДСОЭР: проблема трендов // Научно-исследовательский финансовый институт // *Финансовый журнал*. № 2. С. 81–95. DOI: 10.31107/2075-1990-2019-2-81-95 [Ivashchenko S.M. (2019). DSGE models: Problem of trends. *Financial Journal*, 2, 81–95 (In Russian). DOI: 10.31107/2075-1990-2019-2-81-95 (in Russian).]
- Крепцев Д., Селезнев С.** (2018). Прогнозирование российской экономики с использованием DSGE-моделей с малым количеством уравнений // *Деньги и кредит*. Т. 77. № 2. С. 51–67. [Kreptsev D., Seleznev S. (2018). Forecasting for the Russian economy using small-scale DSGE model. *Russian Journal of Money and Finance*, 77, 2, 51–67 (in Russian).]
- Пильник Н.П., Радионов С.А., Станкевич И.П.** (2018). Обобщенная многопродуктовая декомпозиция элементов использования ВВП России // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. Т. 22. № 2. С. 251–274. [Pilnik N., Radionov S., Stankevich I. (2018). Generalized multi-product decomposition of elements of the use of Russia's GDP. *HSE Economic Journal*, 22, 2, 251–274 (in Russian).]
- Andrle M., Benes M.J.** (2013). System priors: Formulating priors about DSGE models' properties. *International Monetary Fund*, 2013/257, 1–26.
- Andrle M., Hledik T., Kamenik O., Vlcek J.** (2009). Implementing the new structural model of the Czech national bank. *CNB WP*, 2, 1–58.
- Chang Y., Doh T., Schorfheide F.** (2007). Non-stationary hours in a DSGE model. *Journal of Money, Credit and Banking*, 39, 6, 1357–1373.
- Fisher J.D.M.** (2006). The dynamic effects of neutral and investment-specific technology shocks. *Journal of Political Economy*, 114, 3, 413–451.
- Hall A.** (2005). Generalized method of moments. *Oxford University Press*, 1–400.
- Hansen L.** (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 50, 4, 1929–1954.
- Hansen L., Singleton K.** (1982). Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. *Econometrica*, 50, 5, 1269–1286.

- Justiniano A., Primiceri G.E., Tambalotti A.** (2011). Investment shocks and the relative price of investment. *Review of Economic Dynamics*, 14, 1, 102–121.
- Kass R.E., Raftery A.E.** (1995). Bayes factors. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 430, 773–795.
- Niño-Muriel J.D., Rodríguez-Niño N.** (2017). Evaluation of alternatives for modeling non-stationarity in DSGE models. *Banco de la República WP*, 1–43.
- Schmitt-Grohé S., Uribe M.** (2011). Business cycles with a common trend in neutral and investment-specific productivity. *Review of Economic Dynamics*, 14, 1, 122–135.
- Smets F., Wouters R.** (2003). An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the euro area. *Journal of the European Economic Association*, 1, 5, 1123–1175.
- Smets F., Wouters R.** (2005). Comparing shocks and frictions in US and euro area business cycles: A Bayesian DSGE approach. *Journal of Applied Econometrics*, 20, 2, 161–183.

Поступила в редакцию 26.08.2021

Received 26.08.2021

## A.I. Votinov

Financial Research Institute, Ministry of Finance of the Russian Federation; National Research University “Higher School of Economics”, Moscow, Russia

### The effects of additional non-stationary processes on the properties of DSGE-models<sup>2</sup>

**Abstract.** DSGE models are based on the trend-cycle decomposition. The standard approach implies an out-of-model decomposition of the data, in which the trend component is discarded, and the parameters of the model are estimated on the cyclic one. This approach can lead to the loss of statistical information and reduce the quality of the model, which is crucial for practical purposes. The study suggests adding several sector-specific exogenous non-stationary processes to the model, which complement the standard DSGE model. The in-model detrending is described, and an approach to GMM-estimation of the non-stationary processes’ parameters is proposed. Several results are obtained. First, the inclusion of such non-stationary processes in the model increases the marginal density and improves the accuracy of forecasting within the sample. This result is robust to the inclusion of measurement errors in the model. Secondly, it is shown that the addition of exogenous trends allows obtaining a more plausible decomposition of data into a trend and a cycle. Finally, the use of the GMM approach to estimating the trends’ parameters makes possible to increase the marginal density. The results obtained in the paper can be used to create practice-oriented DSGE models.

**Keywords:** DSGE, parameters estimation, stochastic processes, trends.

JEL Classification: C65.

For reference: **Votinov A.I.** (2022). The effects of additional non-stationary processes on the properties of DSGE-models. *Journal of the New Economic Association*, 3 (55), 28–43. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-55-3-2

<sup>2</sup> This study was supported by the Russian Science Foundation (project 21-18-00482) (<https://rscf.ru/project/21-18-00482/>).